Towards Mathematical Sciences
Vol. 4, No. 1, Spring and Summer 2024, pp. 1–18
DOI.10.22067/tmsj.2024.84579.1050
Expository Article

به سوی علوم ریاضی

https://tmsj.um.ac.ir

ABOUT FUZZY STRUCTURES IN MATHEMATICAL ANALYSIS

MANOUCHEHR SHAHAMAT[1*], ALI GANJBAKHSH SANATEE[2], OMID YOUSEFI KIA[3], AND ALI SHAHIDIKIA[4]

[1,3,4]Department of Mathematics, Dezful branch, Islamic Azad University, Dezful, IRAN
m.shahamat@iaud.ac.ir
omidyk2011@gmail.com
a.shahidikia@gmail.com
[2]Faculty of Mathematical Sciences, Department of Mathematics, University of Quchan, Iran
a.ganjbakhsh@qiet.ac.ir

Abstract. In the present article, we examine continuous phases using analytical structures. Based on our analysis of the concepts of continuity and differentiability in the continuous phase, we study the behavior of systems and their applications. Mathematical analysis structures such as continuity, sequences, differentiability, uniformly continuous sequences of functions, and so forth, are not only extensively used in the examination and analysis of the properties of phase function structures, but they also have led to the development of new perspectives in the theory of classical phase models. We demonstrate how differentiable phases introduce systems. Additionally, we study uniformly continuous phases and trace the behavior of systems by examining the behavior of sequences of other systems.

2010 Mathematics Subject Classification. 37B10.
Keywords. fuzz, continuous, differentiable
Date: Rceived 23-9-2023 Revised 10-5-2024 Accepted 28-5-2024 Available Online 27-9-2023

دوره ۴، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۳، صص. ۱–۱۸
DOI. 10.22067/tmsj.2024.84579.1050

مقاله علمی–ترویجی

https://tmsj.um.ac.ir

پیرامون ساختارهای فازی در آنالیز ریاضی

منوچهر شهامت*[1]، علی گنج بخش صنعتی[2]، امید یوسفی کیا[3]، و علی شهیدی کیا[3]

[1,3,4] گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد دزفول، دزفول، ایران
[1]m.shahamat@iaud.ac.ir
[3]o.yousefikia@iaud.ac.ir
[4]alishahidikia@iaud.ac.ir
[2] گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان، ایران
a.ganjbakhsh@qiet.ac.ir

چکیده. در مقاله حاضر به بررسی فازهای پیوسته به کمک ساختارهای آنالیزی می‌پردازیم. با توجه به تحلیلی که از مفهوم پیوستگی و مشتق‌پذیری در فاز پیوسته داریم، رفتار سیستم‌ها و کاربرد آن‌ها را بررسی می‌کنیم. ساختارهای مباحث آنالیز ریاضی مانند پیوستگی، دنباله، مشتق‌پذیری، دنباله توابع به‌طور یکنواخت پیوسته و غیره نه‌تنها در بررسی و تحلیل خواص ساختارهای توابع فاز کاربردهای فراوانی دارد، بلکه باعث به وجود آمدن نگرش‌های جدیدی در نظریه مدل فاز کلاسیک نیز شده است. نشان می‌دهیم فازهای مشتق‌پذیر چگونه سیستم‌ها را معرفی می‌کنند. همچنین فازهای به‌طور یکنواخت پیوسته را مطالعه می‌کنیم و رفتار سیستم‌ها را با بررسی رفتار دنباله‌ای از سیستم‌های دیگر پیگیری می‌کنیم.

2010 Mathematics Subject Classification. 37B10.

واژگان کلیدی. فاز، پیوسته، مشتق‌پذیر.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۲/۷/۱ بازنگری ۱۴۰۳/۲/۲۱ پذیرش ۱۴۰۳/۳/۸ انتشار برخط ۱۴۰۲/۷/۵

نحوه ارجاع به این مقاله: م. شهامت، ع. گنج بخش صنعتی، ا. یوسفی کیا، ع. شهیدی کیا، پیرامون ساختارهای فازی در آنالیز ریاضی، به سوی علوم ریاضی، ۴ (۱۴۰۳)، شماره ۱، ۱–۱۸.

۱. پیش‌گفتار

فرآیند مدل‌سازی ریاضی پدیده‌های دنیای واقعی، غالباً دقیق نیستند. درنتیجه این مدل‌سازی‌ها نیز کارایی لازم برای راه‌حل مسائل دنیای واقعی را ندارند.

سیستم فازی[۱] برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط لطفی‌زاده[۲] معرفی شد. لطفی‌زاده به ناتوانی ریاضیات کلاسیک در برخورد به مسائل نادقیق اشاره کرد و بدین منظور نظریه فازی را برنامه‌ریزی کرد [۴].

برای مقایسه منطق فازی و منطق کلاسیک، فرض کنید یک سیستم فازی طراحی‌شده است که توسط آن می‌توان میزان امانت‌داری افراد را مشخص کرد. در مقابل بر اساس یک سیستم دیجیتال یا منطق کلاسیک نیز امانت‌داری افراد اندازه‌گیری و تعیین می‌شود. به شکل ۱ و تفاوت نتایج حاصل از این دو سیستم توجه کنید. مشخص است که نمی‌توان در مورد امانت‌داری در منطق فازی به‌طورقطع نظر داد درحالی‌که در منطق کلاسیک این کار به‌راحتی امکان‌پذیر است.

به‌عنوان مثالی دیگر می‌توان به کاربرد منطق فازی در ماشین‌های شستشوی لباس اشاره کرد. ماشین‌های لباس‌شویی مدرن از منطق فازی استفاده می‌کنند. آن‌ها حس‌گرهایی دارند که به‌طور مداوم تغییرات دما را ردیابی می‌کنند. بر این اساس کنترل‌ها و عملیات را تنظیم می‌کنند. این سیستم‌ها عملکرد خوبی دارند. منطق فازی فرآیند شستشو، دمای آب، سرعت چرخش، زمان شستشو، مصرف آب و عملکرد آبکشی را کنترل می‌کند.

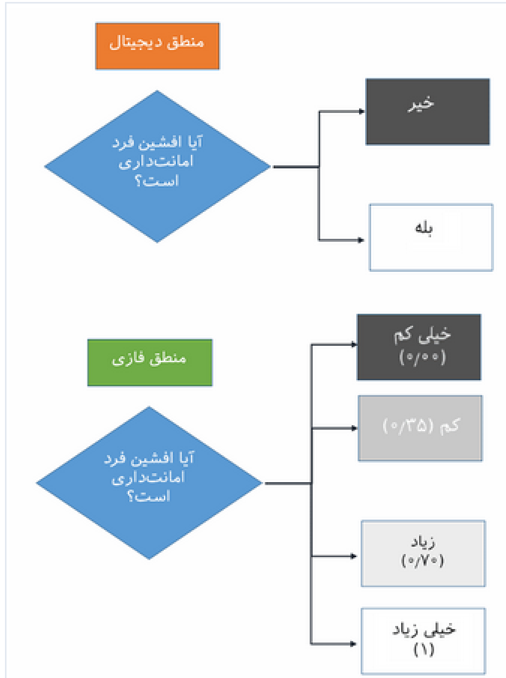
بااین‌وجود سیستم‌های فازی نیز در بعضی موارد ناتوان هستند [۵]. مشخص است که نمی‌توان منطق فازی را راه‌حلی جامع برای همه مسائل دانست؛ بنابراین مهم است که بدانیم در چه مواقعی نباید از منطق فازی استفاده کرد. ازآنجایی‌که بر مبنای قوانین از پیش تعیین‌شده، فرآیند تصمیم‌سازی بر مبنای منطق فازی صورت می‌گیرد، اگر این قوانین دچار نقص یا اشکال باشند، ممکن است نتایج اصلاً قابل‌قبول نباشند. از طرفی پیاده‌سازی منطق فازی در سخت‌افزارهای رایج احتیاج به آزمایش‌های متعدد و زمان‌بر دارد. در زیر به معرفی زمینه‌هایی می‌پردازیم که بهتر است از منطق فازی استفاده نشوند:

(۱) زمانی که از حواس پنج‌گانه استفاده می‌شود، منطق فازی کارساز نیست.
(۲) اگر روش‌های کنترل و تصمیم‌گیری بدون منطق فازی به‌خوبی کار می‌کنند، پس احتیاجی نیست که آن‌ها را به منطق فازی تبدیل کنیم.
(۳) الگوریتم‌های فازی نیاز به اعتبارسنجی و تأیید گسترده دارند.
(۴) سیستم‌های کنترل فازی به تخصص و دانش انسان وابسته هستند.

فاز پیوسته تعمیمی از فاز کلاسیک با دامنه نامتناهی است. بسیاری از نتایج فاز کلاسیک، به فاز پیوسته تعمیم داده‌شده‌اند. در دنیای واقعی ابهام وجود دارد اما بعضی مواقع لازم نیست از جملات دقیق استفاده کرد. برای مثال جمله «هوا گرم است.» را در نظر بگیرید. این جمله باوجودی که دقیق نیست، اما مفهوم آن مشخص

[1] Fuzzy System

[2] Lotfizadeh



شکل ۱: مقایسه ریاضی فازی و کلاسیک.

است درصورتی‌که اگر برای رساندن منظورمان ازجمله دقیق «دمای هوا ۳۰ درجه است.» استفاده می‌کردیم، کارایی کمتری داشت. در اواسط قرن بیستم این ضعف برای سیستم‌های کنترل آشکارتر شد زیرا قرار بود از ماشین به‌جای انسان استفاده شود. واژه فازی معانی مختلفی دارد که از آن جمله می‌توان به واژه‌های «مبهم» و «گنگ» اشاره کرد. در نظریه فازی امکان مدل‌سازی کمیت‌های روزمره مانند «کم، متوسط و زیاد» را دارد که در ریاضیات کلاسیک قابل‌بیان نیستند. نظریه فازی سعی می‌کند هراندازه که ممکن است فاصله بین مدل و واقعیت را کمتر کند. در سیستم فازی می‌توان مفاهیم مبهمی مانند کم، متوسط و زیاد را تعریف و از آن‌ها به‌خوبی استفاده کرد. در بخش ۲، به بررسی مقدمات توابع فازی می‌پردازیم. در بخش ۳، مقدماتی از آنالیز ریاضی را بیان کرده و وارد مبحث فازهای پیوسته می‌شویم. در بخش ۴، مفهوم فازهای مشتق‌پذیر را بیان کرده و توابع فازی را ازنظر شهودی بررسی می‌کنیم.

۲. مفاهیم اولیه، تعاریف و قضایا

در مجموعه‌های کلاسیک برای یک عضو فقط دو حالت رخ می‌دهد. یک عضو یا به مجموعه متعلق است یا متعلق نیست، زیرا در این مجموعه‌ها مرز مشخص است؛ مانند اعداد طبیعی بزرگ‌تر از 10 که به‌صورت $\{x \in \mathbb{N} : x > 10\}$ نشان داده می‌شود. اعداد طبیعی بزرگ‌تر از 10 دقیق و خوش‌تعریف است؛ اما چنانچه گفته شود «اعداد طبیعی خیلی بزرگ‌تر از ده» آنگاه عبارت خیلی بزرگ یک مفهوم مبهم و غیردقیق است. در اینجا برای مثال عدد 9 اصلاً به مجموعه تعلق ندارد اما عدد 16 کمی به مجموعه تعلق دارد و تعلق عدد 1234

به مجموعه بیشتر از تعلق عدد 16 است. می‌توان به میزان عضویت یک عنصر، عددی را نسبت داد. اگر μ به‌عنوان میزان تعلق عضوی از مجموعه کلاسیک A در نظر گرفته شود، آنگاه

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

اما چنانچه μ را به‌عنوان میزان تعلق برای مجموعه فازی $\tilde{A}$ در نظر بگیریم، آنگاه

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 < \mu(x) \leq 1, & x \in \tilde{A}, \\ 0, & x \notin \tilde{A}. \end{cases}$$

یک مجموعه فازی از طریق تابع عضویت آن مشخص می‌شود که نموداری هموار دارد و با طرز فکر بشر بیشتر در تطابق است. درصورتی‌که منحنی تابع عضویت یک مجموعه کلاسیک پله‌ای 0 و 1 بوده و نمی‌تواند طرز فکر دقیق فرد را مشخص نماید. در مجموعه‌های فازی باید عضوها و میزان عضویت مشخص باشد.

تعریف ۱.۲ ([۲]). *فرض کنیم X مجموعه مرجع*[۳] *باشد. مجموعه فازی $\tilde{A}$ تعریف‌شده روی X عبارت است از اعضای X و میزان عضویت $\mu_A(x)$، که در آن μ_A تابع عضویت از X به $[0,1]$ هست و میزان عضویت عناصر A را مشخص می‌کند. درواقع*

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) : \mu_A : X \to [0,1]\}.$$

در حالت کلی مجموعه‌های فازی به‌صورت زوج مرتب نوشته می‌شوند. درصورتی‌که مجموعه مرجع گسسته[۴] باشد، آنگاه هر عضو و میزان عضویت آن در یک پرانتز نوشته می‌شود.

یادآوری ۲.۲. *در این مقاله برای سهولت از نماد $\tilde{A}(x)$ به‌جای نماد $\mu_A(x)$ استفاده می‌کنیم. به همین علت به‌جای مجموعه فاز از تابع فاز نیز می‌توان استفاده کرد.*

مثال ۳.۲. *اگر مجموعه مرجع را $\{3, 4, 5, 6, 9, 10\}$ در نظر بگیریم، آنگاه یک مجموعه فازی برای اعداد بزرگ‌تر از 3 به‌صورت زیر است:*

$$\{(3, 0), (4, 0.1), (5, 0.4), (6, 0.6), (9, 0.9), (10, 1)\}.$$

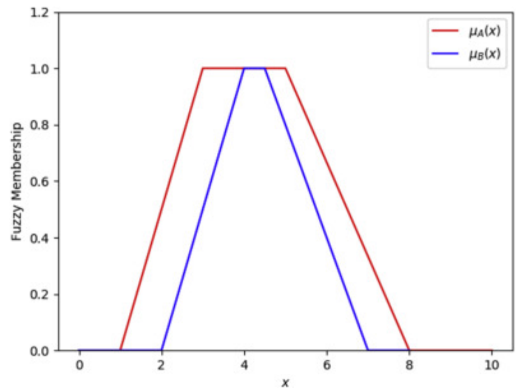
درصورتی‌که مجموعه مرجع پیوسته[۵] باشد، آنگاه مجموعه فازی و تابع عضویت آن به‌صورت یک تابع نوشته می‌شوند.

---

[3]Reference Set

[4]Discrete

[5]Continuous



شکل ۲: توابع فاز برای عدد نزدیک به ۴.

مثال ۴.۲. *اگر مجموعه مرجع را اعداد حقیقی نامنفی در نظر بگیریم، آنگاه یک مجموعه فازی برای اعداد طبیعی نزدیک به صفر به‌صورت زیر پیشنهاد می‌شود:*

$$\{(x, e^{-x}) : x > 0\}.$$

تعریف ۵.۲ ([۳]). *فرض کنیم $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی از E باشد. تکیه‌گاه $\tilde{A}$ را با نماد $supp(\tilde{A})$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$supp(\tilde{A}) = \{e \in E : \tilde{A}(e) > 0\}.$$

برای نمونه در مثال ۳.۲ داریم $\text{supp}(\tilde{A}) = \{4, 5, 6, 9, 10\}$ و برای مثال ۴.۲،

$$\text{supp}(\tilde{A}) = (0, \infty).$$

واضح است که توابع فازی تعریف‌شده بر یک مجموعه مرجع، یکتا نیستند. شکل ۲ نمایش دو تابع فازی برای اعداد نزدیک به 4 است.

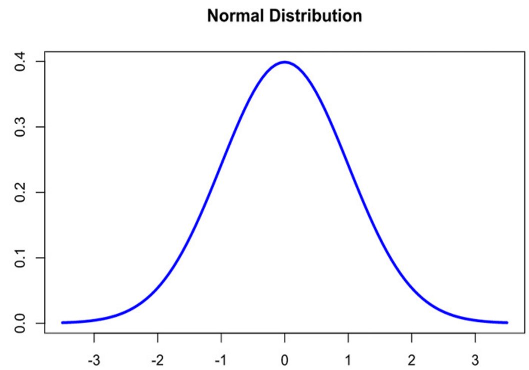
تعریف ۶.۲ ([۶]). *مجموعه فازی $\tilde{A}$ از E را نرمال[۶] گوییم، هرگاه عضوی از E مانند e وجود داشته باشد که $\tilde{A}(e) = 1$.*

تابع فازی مثال ۳.۲ نرمال است اما برای مثال ۴.۲ چنین نیست. در فازهای نرمال همیشه عضویت قطعی[۷] وجود دارند. برای دیدن نمودار فازهای نرمال، شکل ۳ را ببینید.

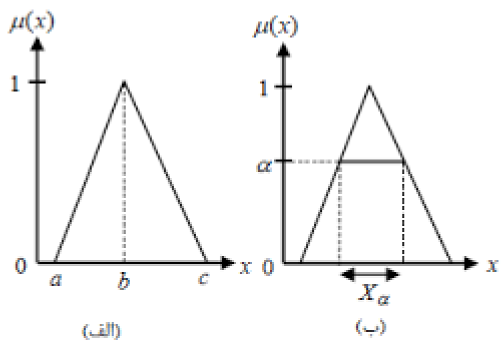
---

[6] Normal

[7] Certainty



شکل ۳: فاز نرمال.



شکل ۴: αـبرش.

تعریف ۷.۲ ([۷]). *فرض کنید α عددی حقیقی باشد. مجموعه αـبرش $\tilde{A}$ را با نماد $\tilde{A}_\alpha$ نشان می‌دهند و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$\tilde{A}_\alpha = \{e \in E : \tilde{A}(e) > \alpha\}.$$

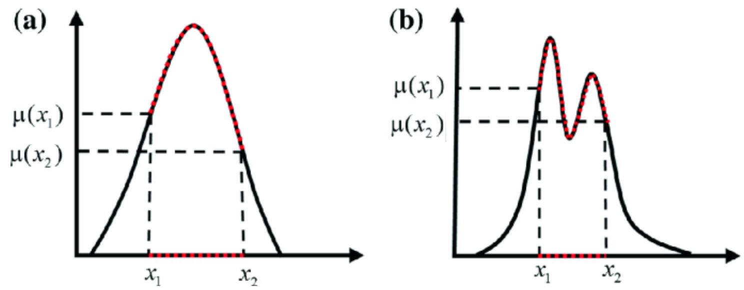
چون ممکن است $\tilde{A}_\alpha$ روی همه عناصر E اثر نکند، پس ممکن است تابع فاز نباشد. شکل ۴ را ببینید.

تعریف ۸.۲. *مجموعه فازی $\tilde{A}$ از E را محدب[۸] گوییم، هرگاه به ازای هر دو عضو $e_1, e_2 \in E$ و هر $t \in [0, 1]$ داشته باشیم*

$$\tilde{A}(te_1 + (1-t)e_2) \leq \min\{\tilde{A}(e_1), \tilde{A}(e_2)\}.$$

هر دو مثال‌های ۳.۲ و ۴.۲ محدب هستند. چنانچه تابع فازی محدب باشد، آنگاه اگر هر دو نقطه نمودار آن را به هم وصل کنیم، بایستی نقطه مینیمم زیر خط گذرا از آن دو نقطه قرار گیرد. به‌عبارت‌دیگر نباید دارای

[8] Convex



شکل ۵: فاز محدب و نامحدب.

مینیمم نسبی باشد و تنها می‌تواند دارای مینیمم مطلق باشد که آن نیز تنها در ابتدا یا انتهای بازه رخ می‌دهد. نمودار توابع فاز محدب نمی‌توانند فرورفتگی داشته باشند و حداکثر دارای یک برآمدگی هستند. همچنین اگر در بازه‌ای نزولی باشند، بایستی در کل دامنه هم نزولی باشند. سیستم‌های فازی محدب با ساختار گنبدی شکلی که دارند تمایل به حرکت به سمت سیستم نرمال دارند. ازآنجاکه تقعر آن‌ها به سمت پایین است، لذا این تمایل سیستم به‌کندی رخ می‌دهد. پیش‌بینی رفتار چنین سیستم‌هایی برخلاف دیگر سیستم‌ها امکان‌پذیر است و درنتیجه اطلاعات آن‌ها قابل‌دسترسی است. نمودار فازهای محدب و نامحدب در شکل ۵ داده‌شده‌اند.

فرض کنیم $\{\tilde{A_n}\}$ دنباله‌ای از فازهای تعریف‌شده بر مجموعه E باشند. اجتماع و اشتراک فازهای $\tilde{A_n}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bigcup_{n\geq 1} \tilde{A_n}(e) = \max\{\tilde{A_n}(e) : n \in \mathbb{N}\}.$$

$$\bigcap_{n\geq 1} \tilde{A_n}(e) = \min\{\tilde{A_n}(e) : n \in \mathbb{N}\}.$$

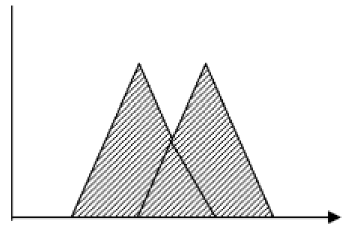
واضح است که اجتماع و اشتراک فازها، توابع فاز هستند. ازآنجاکه فاز اجتماع همیشه بیشترین عضویت و فاز اشتراک کمترین عضویت را نشان می‌دهد، پس آن‌ها را به ترتیب فاز بیشینه و کمینه نامیده می‌شوند. فاز بیشینه تلاش می‌کند تا بیشترین رضایتمندی یا قطعیت را معرفی کند درصورتی‌که فاز کمینه دنبال معرفی کمترین قطعیت است. شکل‌های ۶ و ۷ به ترتیب فازهای بیشینه و کمینه را در حالت متناهی نشان می‌دهند.

حال در قضیه‌ی بعدی به روابط بین نرمال بودن فازها با فازهای بیشینه و کمینه همچنین روابط بین تکیه‌گاه آن‌ها می‌پردازیم.

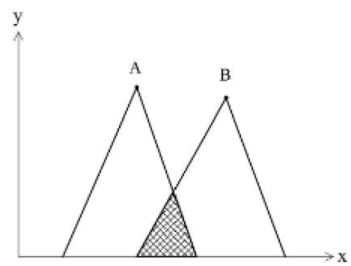
قضیه ۹.۲. *فرض کنیم $\{\tilde{A_n}\}$ دنباله‌ای از فازهای تعریف‌شده بر مجموعه E باشند. در این صورت،*

(۱) *دست‌کم یکی از فازهای $\{\tilde{A_n}\}$ نرمال است اگر و تنها اگر فاز بیشینه آن‌ها نرمال باشد.*

(۲) *اگر فاز کمینه نرمال باشد، آنگاه فازهای $\{\tilde{A_n}\}$ نرمال هستند.*



شکل ۶: فاز بیشینه.



شکل ۷: فاز کمینه.

اثبات. (۱) نخست فرض کنیم به ازای $i \in \mathbb{N}$، فاز $\{\tilde{A}_i\}$ نرمال باشد. یعنی $e_0 \in E$ وجود دارد که $\tilde{A}_i(e_0) = 1$. پس

$$\max\{\tilde{A}_n(e) : n \in \mathbb{N}\} = 1.$$

درنتیجه $\bigcup_{n\geq 1} \tilde{A}_n(e_0) = 1$. بنابراین $\bigcup_{n\geq 1} \tilde{A}_n(e)$ نرمال است. بالعکس، فرض کنیم $\bigcup_{n\geq 1} \tilde{A}_n(e)$ نرمال باشد. پس $e_0 \in E$ وجود دارد که

$$\bigcup_{n\geq 1} \tilde{A}_n(e_0) = 1.$$

پس $i \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $\tilde{A}_i(e_0) = 1$ درنتیجه $\tilde{A}_i$ نرمال است.

(۲) فرض کنیم فاز کمینه نرمال باشد. پس $e_0 \in E$ وجود دارد که

$$\bigcap_{n\geq 1} \tilde{A}_n(e_0) = 1.$$

درنتیجه

$$\min\{\tilde{A}_n(e) : n \in \mathbb{N}\}.$$

پس به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\tilde{A}_i(e_0) = 1$. درنتیجه $\tilde{A}_n$ نرمال است.

□

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قسمت (۲) از قضیه‌ی ۹.۲ ممکن است برقرار نباشد.

مثال ۱۰.۲. *فازهای $\tilde{A}_1$ و $\tilde{A}_2$ به‌صورت زیر نرمال هستند:*

$$\tilde{A}_1 := \{(x,1),(y,0.5\}, \tilde{A}_2 := \{(x,0.5),(y,1)\}.$$

اما واضح است که

$$\tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2 = \{(x,0.5),(y,05)\}$$

نرمال نیست.

قضیه ۱۱.۲. *فرض کنیم $\{\tilde{A}_n\}$ دنباله‌ای از فازهای تعریف‌شده بر فضای E باشند. در این صورت:*

$$\textit{supp}\big(\bigcup_{n\geq 1}\tilde{A}_n\big) = \bigcup\{\textit{supp}(\tilde{A}_n) : n\in\mathbb{N}\} \quad (۱)$$

$$\textit{supp}\big(\bigcap_{n\geq 1}\tilde{A}_n\big) = \bigcap\{\textit{supp}(\tilde{A}_n) : n\in\mathbb{N}\} \quad (۲)$$

اثبات. با توجه به تعریف فاز بیشینه و کمینه، اثبات بدیهی است. □

مثال ۱۲.۲. *اگر مجموعه مرجع را اعداد حقیقی مثبت درنظر بگیریم، آنگاه توابع فازی $\tilde{A}_1$ و $\tilde{A}_2$ را برای افراد قد بلند بصورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\tilde{A}_1(x) = \begin{cases} 0, & 0\leq x\leq 1,\\ -0.5+x, & 1\leq x\leq 1.5,\\ 1, & 1.5\leq x,\end{cases}$$

$$\tilde{A}_2(x) = \begin{cases} 0.5x, & 0\leq x\leq 1,\\ \frac{1}{2}, & 1\leq x< 1.5,\\ x-1, & 1.5\leq x< 2,\\ 1, & 2\leq x.\end{cases}$$

در این صورت فاز بیشینه و کمینه به‌صورت زیر هستند:

$$\tilde{A}_1(x)\cap\tilde{A}_2(x) = \begin{cases} 0, & 0\leq x\leq 1,\\ \frac{1}{2}, & 1\leq x< 1.5,\\ x-1, & 1.5\leq x< 2,\\ 1, & 2\leq x,\end{cases}$$

$$\tilde{A}_1(x) \cup \tilde{A}_2(x) = \begin{cases} 0.5x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 1.5, \\ -0.5 + x, & 1.5 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x. \end{cases}$$

در این مثال فاز بیشینه تمایل دارد تاحد امکان افراد را قدبلند معرفی نماید اما فازکمینه تمایل دارد تا برای افراد قدبلند شرایط سخت‌تری در نظر بگیرد و تاحد امکان افراد را قدبلند لحاظ نمی‌کند.

یکی از کاربردهای فازهای کمینه کمک به تصمیم‌گیری‌های فازی است. مثال بعد چنین مطلبی را بیان می‌کند.

مثال ۱۳.۲. *یک شرکت ساختمانی زمین‌هایی با مساحت* 150، 200، 280، 350، 750، 1200 *مترمربع دارد. می‌خواهد از بین آن‌ها زمین مناسبی برای ساختن مجتمع* 8 *واحدی انتخاب کند. فرض کنید توابع فازی زمین مناسب و زمین بزرگ به‌صورت زیر باشند:*

$$\tilde{L} = \{(0, 150), (0.1, 300), (0.3, 280), (0.6, 350), (0.8, 500), (1, 750)\},$$

$$\tilde{S} = \{(0.8, 150), (1, 300), (1, 280), (0.7, 350), (0.3, 500), (0, 750)\}.$$

مایلیم زمین بهینه را بیابیم. چون زمین موردنظر باید هر دو خاصیت مناسب و بزرگ بودن را داشته باشد، پس باید اشتراک آن‌ها را در نظر بگیریم.

$$\tilde{L} \cap \tilde{S} = \{(0, 150), (0.1, 300), (0.3, 280), (0.6, 350), (0.3, 500), (0, 750)\}.$$

حال باید زمینی را انتخاب کنیم‌که بیشترین مقدار عضویت را داشته باشد. پس انتخاب بهینه زمین با مساحت 350 *مترمربع است.*

۳. توابع به‌طور یکنواخت پیوسته

تعاریف و نمادهای این بخش از مرجع [۷] گرفته‌شده‌اند.

تعریف ۱.۳. *مجموعه* E *در صورتی یک فضای متری است‌که به هر دو نقطه* a *و* b *از* X *عدد حقیقی مانند* $d(a,b)$ *به نام فاصله*[۹] *از* a *تا* b *طوری مربوط شده باشدکه*

(۱) *هرگاه* $a \neq b$، *آنگاه* $d(a,b) > 0$ *و* $d(a,a) = 0$.

(۲) $d(a,b) = d(b,a)$.

[9] Distance

(۳) *به ازای هر $e \in E$ داشته باشیم $d(a,b) \leq d(a,e) + d(e,b)$. هر تابع برخوردار از این سه خاصیت را یک متر نامند.*

در مجموعه اعداد حقیقی، قدر مطلق یک متر است و آن را متر اقلیدسی نامند.

تعریف ۲.۳. *فرض کنیم E یک فضای متری[10] باشد.*

(۱) *یک همسایگی[11] نقطه p به شعاع r مجموعه‌ای مانند $N_r(p)$ است که به‌صورت $N_r(p) = \{e \in E : d(p,e) < r\}$ تعریف می‌شود. در فضای اقلیدسی همسایگی‌ها بازه‌های باز هستند.*

(۲) *نقطه p یک نقطه درونی[12] $\tilde{A}$ است، هرگاه یک همسایگی از p مانند N وجود داشته باشد که $N \subset \tilde{A}$.*

(۳) *مجموعه A باز[13] است، هرگاه هر نقطه از آن نقطه درونی باشد.*

تعریف ۳.۳. *دنباله e_n در فضای متری E را همگرا [14] به e گوییم، هرگاه به ازای هر $0 < \epsilon$ عدد صحیحی مانند N وجود داشته باشد که اگر $n > N$، آنگاه $d(e_n, e) < \epsilon$.*

تعریف ۴.۳. *نگاشت f را پیوسته گوییم، هرگاه تصویر معکوس هر مجموعه باز در Y یک مجموعه باز در X باشد.*

زمانی که تابع فاز پیوسته باشد، تغییر عضویت ناگهانی رخ نمی‌دهد. فازهای پیوسته دارای امنیت بیشتری هستند. برای مثال فرض کنیم مجموعه مرجع بازه $[0, 20]$ باشد. توابع فازی $\tilde{A}_1$ و $\tilde{A}_2$ که میزان دشواری صعود به قله با ارتفاع 20 را مشخص می‌کنند، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{A}_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}x, & 0 \leq x \leq 10, \\ 1, & 10 \leq x \leq 20, \end{cases}$$

$$\tilde{A}_2(x) = \frac{1}{20}x.$$

تابع فاز $\tilde{A}_1$ وقتی به ارتفاع 10 می‌رسیم، تغییر ناگهانی می‌دهد و قابل پیش‌بینی نیست. اما با استفاده از تابع فازی $\tilde{A}_2$ می‌توان آینده صعود را پیش‌بینی کرد.

---

[10] Metric space

[11] Neighborhood

[12] Internal

[13] Open

[14] Converge

تعریف ۵.۳. *دنباله‌ای از توابع مانند f_n بر A به‌طور یکنواخت[۱۵] به تابع f همگراست، هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ عدد صحیحی مانند N موجود باشد که برای هر $x \in A$ و $n > N$، داشته باشیم $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. در این صورت می‌نویسیم $f_n \overset{u}{\Longrightarrow} f$*

اگر $\tilde{A}_n \overset{u}{\Longrightarrow} \tilde{A}$، آنگاه می‌توان میزان عضویت دنباله $\{\tilde{A}_n(x)\}$ را به کمک $\tilde{A}(x)$ تقریب زد.

مثال ۶.۳. (۱) *فرض کنیم مجموعه مرجع بازه $[0, 4]$ باشد. به ازای هر عدد طبیعی تابع فازی $\tilde{A}_n$ را میزان رضایت‌مندی شهروندان از عملکرد دولت در بازه چهارساله به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\tilde{A}_n(x) = \frac{1}{8}(1 + \frac{1}{n})x.$$

در این صورت

$$\tilde{A}_n \overset{u}{\Longrightarrow} \tilde{A}(x) = \frac{1}{8}x.$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که هرچقدر به پایان دوره چهارساله نزدیک می‌شویم، رضایت شهروندان کم شده و میزان رضایت آن‌ها به 12.5 درصد از آغاز عملکرد نزدیک می‌شود.

(۲) *فرض کنیم مجموعه مرجع بازه $[0, 1000]$ باشد. به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ تابع فازی میزان بازدهی خاک یک منطقه را در پایان سال n ام به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:*

$$\tilde{A}_n(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2n}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1000. \end{cases}$$

در این صورت

$$\tilde{A}_n \overset{u}{\Longrightarrow} \tilde{0},$$

یعنی با گذشت زمان میزان بازدهی خاک به صفر نزدیک می‌شود.

قضیه ۷.۳. *اگر $\tilde{A}_n \overset{u}{\Longrightarrow} \tilde{A}$، آنگاه عدد طبیعی N وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $n > N$ داریم*

$$supp(\tilde{A}) \subseteq supp(\tilde{A}_n).$$

اثبات. فرض کنیم $e_0 \in \tilde{A}$. بنابراین $\tilde{A}(e_0) > 0$. چون $\lim_{n\to\infty}\tilde{A}_n(e_0) = \tilde{A}(e_0)$. پس عدد طبیعی N وجود دارد که به ازای هر $n \geq N$ داریم

$$|\tilde{A}_n(e_0) - \tilde{A}(e_0)| < \frac{1}{2}\tilde{A}(e_0).$$

درنتیجه $\tilde{A}_n(e_0) > \frac{1}{2}\tilde{A}(e_0) > 0$. پس $e_0 \in \tilde{A}_n$ به ازای هر $n \geq N$ برقرار است. □

---

[15] Uniformly

به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیه‌ی قبل داریم.

نتیجه ۸.۳.

(۱)

$$supp(\tilde{A}) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} supp(\tilde{A_n}).$$

(۲)

$$supp(\tilde{A}) \subseteq \bigcap_{n\geq N} supp(\tilde{A_n}).$$

قضیه ۹.۳. *اگر $\tilde{A_n}$ دنباله‌ای از فازهای نرمال بر فضای فشرده E باشند که به $\tilde{A}$ به‌طور یکنواخت‌همگرا باشد، آنگاه $\tilde{A}$ نرمال است.*

اثبات. با توجه به فرض، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ عنصر e_n وجود دارد که $\tilde{A_n}(e_n) = 1$. درنتیجه $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از فضای متری فشرده E است. پس زیردنباله‌ی[16] $\{e_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ وجود دارد که به e همگراست. همچنین $\tilde{A_n} \overset{u}{\Longrightarrow} \tilde{A}$, پس

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{A_{i_n}}(e_{i_n}) = \lim_{n\to\infty}\tilde{A_{i_n}}(e) = \tilde{A}(e).$$

از طرفی $\lim_{n\to\infty}\tilde{A_{i_n}}(e) = \tilde{A}(e)$. پس $\tilde{A}(e) = 1$. □

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه ۹.۳ برقرار نیست.

مثال ۱۰.۳. *توابع فاز $\tilde{A_n}(x) = 1 - \frac{1}{n}$ را بر بازه $[0, 1]$ تعریف می‌کنیم. در این صورت*

$$\tilde{A_n} \overset{u}{\Longrightarrow} 1.$$

در اینجا $\tilde{A} := 1$ نرمال است اما فازهای $\tilde{A_n}$ چنین نیستند.

قضیه ۱۱.۳. *فرض‌کنید $\{\tilde{A_n}\}$ دنباله‌ای از فازهای تعریف‌شده بر E باشند و $\tilde{A_n} \overset{u}{\Longrightarrow} \tilde{A}$.*

(۱) *اگر $\tilde{A}$ یک‌به‌یک[17] و محدب باشد، آنگاه از مرتبه‌ای به بعد فازهای $\tilde{A_n}$ محدب هستند.*

(۲) *اگر فازهای $\tilde{A_n}$ محدب و تعداد نامتناهی از آن‌ها یک‌به‌یک باشند، آنگاه فاز $\tilde{A}$ محدب است.*

اثبات. (۱) فرض کنیم تابع فاز $\tilde{A}$ محدب باشد. گیریم $t \in [0, 1]$ و $e_1, e_2 \in E$ دلخواه باشند. بدون آنکه از کلیت اثبات کاسته شود، فرض کنیم $\tilde{A}(e_1) \leq \tilde{A}(e_2)$. قرار می‌دهیم $e = te_1+(1-t)e_2$. پس $\tilde{A}(e) \geq \tilde{A}(e_1)$. اگر $e = e_1$، آنگاه اثبات تمام است. پس فرض کنیم $e \neq e_1$. درنتیجه

[16] Sub-sequence

[17] One to one

$\tilde{A}(e) - \tilde{A}(e_1) > 0$. قرار می‌دهیم $\epsilon := \frac{\tilde{A}(e)-\tilde{A}(e_1)}{2}$. با توجه به تعریف $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد که به ازای هر $n \geq N$ داریم

$$\left|\tilde{A}(e) - \tilde{A}_n(e)\right| < \epsilon, \left|\tilde{A}(e_1) - \tilde{A}_n(e_1)\right| < \epsilon.$$

درنتیجه

$$\tilde{A}_n(e) > \tilde{A}(e) - \frac{\tilde{A}(e) - \tilde{A}(e_1)}{2} = \frac{\tilde{A}(e) + \tilde{A}(e_1)}{2} > \tilde{A}(e_1) + \epsilon.$$

از طرفی $\tilde{A}_n(e_1) < \tilde{A}(e_1) + \epsilon$. پس $\tilde{A}_n(e) > \tilde{A}_n(e_1)$ و درنتیجه $\tilde{A}_n$ محدب است.

(۲) اثبات این قسمت مشابه (۱) است.

□

قضیه ۱۲.۳ ([۷]). *اگر $\{\tilde{A}_n\}$ دنباله‌ای از فازهای پیوسته بر E باشند که $\tilde{A}_n \overset{u}{\Longrightarrow} \tilde{A}$. آنگاه، $\tilde{A}$ پیوسته است.*

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه ۱۲.۳ برقرار نیست.

مثال ۱۳.۳. *فرض کنیم $\tilde{A}_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$. در این صورت به ازای هر $x \in [0,1]$ داریم $lim_{n\to\infty}\tilde{A}_n(x) = 0$. در اینجا $\tilde{A}(x) = 0$ و $\tilde{A}_n$ به‌طور یکنواخت پیوسته‌اند اما $\tilde{A}_n \overset{u}{\Longrightarrow} \tilde{A}$ برقرار نیست* [۷].

۴. مشتق تابع فاز

مشتق[18] تابع فاز، آهنگ تغییرات عضویت عناصر مجموعه مرجع را نشان می‌دهد. زمانی که مشتق مثبت باشد، یعنی عضوهای مجموعه مرجع قطعیت بیشتری دارند. همچنین هراندازه مقدار مشتق بزرگ‌تر باشد، یعنی میل افراد به رضایتمندی یا قطعیت عضوها در حال افزایش است.

میزان قطعیت فازهای مشتق‌پذیر تقریباً قابل‌تشخیص است. چنانچه تابع فازی در e_0 مشتق‌پذیر باشد، آنگاه در یک همسایگی از آن نقطه رفتار تابع فاز مشابه میزان قطعیت در نقطه e_0 است. اما چنانچه مشتق‌پذیر نباشد، آنگاه میزان قطعیت ممکن است در نقاطی بسیار نزدیک به نقطه e_0 نیز متفاوت با قطعیت در نقطه e_0 باشند.

[18] Derivative

مثال ۱.۴. *برای نمرات خوب مجموعه مرجع را بازه $[0,20]$ در نظر می‌گیریم. توابع فازی $\tilde{A}_1(x)$ و $\tilde{A}_2(x)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\tilde{A}_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 10, \\ 10x - 100, & 10 < x < 10.1, \\ 1, & 10.1 \leq x \leq 20, \end{cases}$$

و

$$\tilde{A}_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 10, \\ \frac{1}{100}(x-10)^2, & 10 \leq x \leq 20. \end{cases}$$

با توجه به توابع فوق ازنظر خانواده‌ها نمره 10 بسیار ضعیف است درصورتی‌که نمره 10.05 برای خانواده دوم همچنان ضعیف درحالی‌که برای خانواده اولی نمره‌ای خوب لحاظ می‌شود. این اختلاف ناشی از این است که تابع فاز $\tilde{A}_2(x)$ در 10 مشتق‌پذیر است بنابراین تابع فاز هموار بوده و رفتار سیستم در نقاط نزدیک به هم، مشابه هم هستند اما تابع فاز در $\tilde{A}_1(x)$ چنین نیست. این اختلاف برای حالتی‌که فاز پیوسته هم نباشد، بیشتر می‌شود.

مثال ۲.۴. *در یک کوره حرارتی برای کنترل سیستم حرارتی نیاز به مدل‌سازی مجموعه‌های حرارت کم، حرارت متوسط و حرارت زیاد داریم. اگر مجموعه مرجع بازه $[0,400]$ باشد، آنگاه تابع فازی برای حرارت کم را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\tilde{A}_l(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 240, \\ \frac{400-x}{160}, & 240 < x < 400, \\ 0, & 400 \leq x. \end{cases}$$

در اینجا برای دمای کمتر از 240 یا بیشتر از 400 مقدار مشتق برابر صفر است پس مقدار تابع فاز با حرارت کم برای این بازه دمایی ثابت است. یعنی دمای کمتر از 240 درجه حرارت پایین و دمای بیشتر از 400 حرارت زیاد محسوب می‌شود. همچنین مقدار مشتق در بازه $[240,400]$ منفی و ثابت است. پس تابع فاز حرارت کم نزولی است. پس زمانی‌که دما از 240 به 400 نزدیک می‌شود، میزان حرارت بر اساس یک تابع خطی زیاد می‌شود.

مثال ۳.۴. *خانواده دوم مربوط به مثال ۱.۴ از نمرات خوب را در نظر بگیرید. در این صورت*

$$\tilde{A}_2{}'(11) = \frac{1}{50} < \frac{1}{10} = \tilde{A}_2{}'(15).$$

پس ازنظر خانواده دوم آهنگ قطعیت خوب بودن نمره 15 بسیار بیشتر از نمره 11 است. برای مثال وقتی فردی از این خانواده ابتدا نمره 15 اخذ کرده باشد، سپس نمره 16 را کسب کند، رضایت خانواده به‌مراتب بیشتر از زمانی است که پیشرفت فرد از نمره 11 به 13 باشد.

ازآنجاکه مقدار مشتق ممکن است منفی باشد، پس مشتق یک فاز ممکن است خود یک فاز نباشد. اما مشتق فازهای صعودی با شرط $\tilde{A}' \leq 1$ چنین مشکلی را ندارد و نتیجه تابع فاز هستند که ما آن‌ها را فاز مشتق نام‌گذاری می‌کنیم.

اگر $\tilde{A}'(e) = 0$ برابر صفر باشد، آنگاه e یک نقطه بحرانی تابع فاز است. چنانچه $\tilde{A}''(e)$ منفی (مثبت) شود، آنگاه تابع فاز در e به بیشترین (کمترین) قطعیت خود می‌رسد. در حالت کلی نرمال بودن یا نبودن یک فاز به مشتق آن فاز وابسته نیست. یعنی یک فاز در عین نرمال بودن، ممکن است دارای فاز مشتق نرمال یا غیرنرمال باشد.

قضیه ۴.۴. (۱) *فازهای مشتق همواره محدب هستند.*

(۲) *تکیه‌گاه فاز مشتق ناتهی است اگر و تنها اگر تابع فاز، ثابت نباشد.*

اثبات. (۱) فرض کنیم $\tilde{A}$ یک فاز مشتق باشد. با توجه تعریف فاز، بایستی $\tilde{A}' \geq 0$. پس تابع فاز تابعی صعودی است. حال فرض کنیم $e_1 \leq e_2 \in E$ در این صورت

$$e_1 \leq te_1 + (1-t)e_2 \leq e_2.$$

پس

$$\tilde{A}(e_1) \leq \tilde{A}(te_1 + (1-t)e_2) \leq \tilde{A}(e_2).$$

از طرفی

$$\tilde{A}(e_2) \leq \tilde{A}(te_1 + (1-t)e_2).$$

درنتیجه

$$\tilde{A}(te_1 + (1-t)e_2) \geq \tilde{A}(e_1) = \min\{\tilde{A}(e_1), \tilde{A}(e_2)\}$$

و اثبات تمام است.

(۲) فرض کنیم $\tilde{A}'$ تابع فاز باشد و $\text{supp}\tilde{A}' \neq \emptyset$. پس عنصر $e \in E$ وجود دارد که $\tilde{A}'(e) > 0$. پس تابع فاز ثابت نیست. بالعکس، فرض کنیم تابع فاز $\tilde{A}$ ثابت نباشد. پس $e_1 < e_2 \in E$ وجود دارند که $\tilde{A}(e_1) \neq \tilde{A}(e_2)$. با توجه به قضیه مقدار میانگین عدد $e \in [e_1, e_2]$ وجود دارد که $\tilde{A}'(e) = \frac{\tilde{A}(e_2) - \tilde{A}(e_1)}{e_2 - e_1} > 0$. درنتیجه $\tilde{A}'(e) > 0$. پس $\text{supp}(\tilde{A}') \neq \emptyset$.

□

قضیه ۵.۴. *فرض کنیم $\tilde{A}$ تابع فاز پیوسته‌ای بر بازه‌ی $[a,b]$ باشد. در این صورت دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌های $A_n(X) = \int_0^1 c_n\tilde{A}(1-(t-x)^2)^n dt$ وجود دارد که $A_n \overset{u}{\Longrightarrow} \tilde{A}$.*

۵. نتیجه‌گیری

بررسی و تحلیل خواص توابع فازی به کمک ساختارهای آنالیزی امکان‌پذیر است. ساختارهای آنالیزی مانند پیوستگی، مشتق‌پذیری و غیره باعث به وجود آمدن نگرش‌های جدیدی در منطق فازی می‌شوند. ارتباط بین منطق فازی و منطق کلاسیک به کمک این ساختارها امکان‌پذیر بوده و باعث می‌شود تا عدم قطعیت‌های موجود در تصمیم‌گیری‌های انسانی را توصیف نمایند. به‌طورکلی مسائل پیچیده فازی به کمک ساختارهای آنالیزی ساده‌تر می‌شوند. حتی اگر پارامترهای ما نامشخص یا نادقیق باشند. زیرا می‌توان رفتار یک سیستم را به کمک سیستمی دیگر که پارامترهایی شناخته‌شده دارند، بررسی و پیش‌بینی کرد.

مراجع

[۱] ا. افضلی، م. کوچکی رفسنجانی و آ. برومند سعید، *مدل تصمیم گیری چند هدفه فازی برای انتخاب تأمین‌کننده با رویکرد تصمیم‌گیری گروهی*، همایش ملی علوم و مهندسی کامپیوتر، نجف آباد، ۱۳۹۰.

[۲] ح. رضایی و م. رشید پور، *نگاشت مجموعه‌های فازی نوع ۲*، ۱۳۹۸.

[۳] ا. رنجبر یانه سری و م. اصغری لاریمی، *اجتماع زیرگروه‌های فازی و نرمال فازی*، همایش منطقه‌ای پژوهشهای نوین در ریاضی، گرگان، ۱۳۹۰.

[۴] ش. سرگلزائی و ح. میش مست نهی، *مروری بر مجموعه‌های فازی نوع-۲*، ۱۳۹۸.

[۵] ا. کیخا و ح. میش مست نهی، *ارائه مدل نوین ارزیابی و رتبه بندی کارکنان، سازمان‌ها و حل مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه در محیط فازی مردد*، ۱۴۰۰.

[6] A. Najafi, and A. Borumand Saeid, *Fuzzy Points in BE-Algebras,* 1980.

[7] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis,* 3rd ed. McGraw-Hill, New York, 1976.